Travaux pratiques | [M] TP n°4

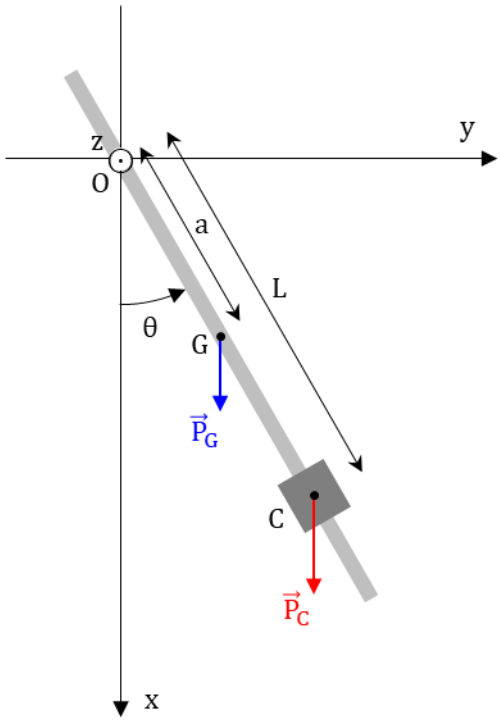
Étude du pendule pesant

Dans ce TP, nous allons étudier un pendule pesant, composé d'une tige sur laquelle est fixé un cylindre. La position de ce cylindre pourra être modifiée.

L'objectif est, dans un premier temps, de mesurer les moments d'inertie de la tige et du cylindre. Nous étudierons ensuite la perte d'isochronisme des oscillations aux grands angles.

I - Mise en place du montage expérimental

I.1 - Etude théorique du pendule pesant



Un **pendule pesant**, par opposition au pendule simple, est un pendule où l'on ne peut pas négliger le moment d'inertie de la barre devant celui de la masse placée à l'extrémité du pendule.

On étudie le système { barre + cylindre } dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Les forces exercées sur le système sont :

- le poids de la barre, dont le moment par rapport à l'axe (Oz) est :

$\mathcal{M}_{Oz}(\vec{P}_G) = -m_{barre}\, g\, a \sin(\theta) \qquad \text{avec : } a = OG$

- le poids du cylindre, dont le moment par rapport à l'axe (Oz) est :

$\mathcal{M}_{Oz}(\vec{P}_C) = -m_{cyl}\, g\, L \sin(\theta) \qquad \text{avec : } L = OC$

- les actions de la liaison pivot, dont le moment par rapport à (Oz) est supposé nul (liaison pivot parfaite) ;
- les frottements fluides liés à l'air, que l'on néglige si la durée de l'acquisition est suffisamment faible.

On note J_{Oz}^{tot} le moment d'inertie du système par rapport à l'axe (Oz) :

$$J_{Oz}^{tot} = J_{Oz}^{barre} + J_{Oz}^{cyl}$$

La **loi de Huygens** donne le moment d'inertie $J_{Oz}^{\{S\}}$ d'un solide S par rapport à un axe (Oz) en fonction du moment d'inertie $J_{Cz}^{\{S\}}$ par rapport à un axe parallèle à (Oz) et passant par le centre d'inertie C, noté (Cz) :

$$J_{Oz}^{\{S\}} = J_{Cz}^{\{S\}} + m_{\{S\}}\, OC^2$$

Appliqué au cas du cylindre :

$$J_{Oz}^{cyl} = J_{Cz}^{cyl} + m_{cyl}\, L^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{J_{Oz}^{tot} = J_{Oz}^{barre} + J_{Cz}^{cyl} + m_{cyl}\, L^2}$$

Le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe (Oz) donne donc :

$$J_{Oz}^{tot}\, \ddot{\theta} = -m_{barre}\, g\, a \sin(\theta) - m_{cyl}\, g\, L \sin(\theta)$$

On obtient ainsi l'équation du mouvement :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{m_{barre}\, g\, a + m_{cyl}\, g\, L}{J_{Oz}^{tot}} \sin(\theta) = 0}$$

⌂ Lorsqu'on se place dans l'approximation des petites oscillations, que vaut la période T_0 des oscillations ?

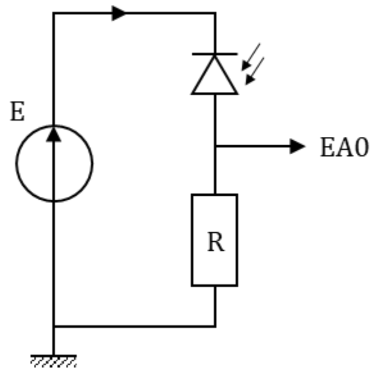
L'objectif de la partie II du TP est de mesurer le moment d'inertie J_{Cz}^{cyl} du cylindre par rapport à l'axe (Cz).

L'objectif de la partie III est de mesurer la période T des oscillations pour un angle initial θ_{max} quelconque, afin de montrer que T diffère de T_0 lorsque θ_{max} devient grand (perte d'isochronisme).

I.2 - Détection automatique de la fréquence d'oscillation

Afin de mesurer J_{Cz}^{cyl} le plus précisément possible, nous allons utiliser un laser et une photodiode (détecteur de lumière), de sorte que le pendule obstrue le laser qu'il passe en position verticale. On étudiera le signal électrique résultant via la carte d'acquisition et le logiciel LatisPro.

- Réaliser le montage ci-contre de conditionnement de la photodiode. Attention au sens de branchement de la photodiode, qui importe (contrairement aux dipôles dont on a l'habitude : R, L et C). Choisir une tension continue $E = 15\ \mathrm{V}$ et une résistance $R = 20\ \mathrm{k\Omega}$.



- Vérifier, à l'aide d'un voltmètre branché aux bornes de la résistance, que le montage possède les propriétés suivantes :
  - $U_R = 0$ lorsque la photodiode ne reçoit pas de lumière ;
  - $U_R > 0$ lorsque la photodiode reçoit la lumière du laser en direct. Normalement, U_R doit être comprise entre 0,5 et 5 V. Appeler le professeur si ce n'est pas le cas.
- Retirer alors le multimètre et brancher la carte d'acquisition à la place.
- Écarter le pendule de sa position d'équilibre, le lâcher et réaliser un enregistrement pour tester le montage (choisir un temps total d'acquisition de 20 s). Quel lien existe-t-il entre la période du signal électrique et la période des oscillations du pendule pesant ?

II - Détermination des moments d'inertie

- Proposer puis mettre en œuvre un protocole permettant de mesurer le moment d'inertie J_{Oz}^{barre} de la barre par rapport à l'axe (Oz).
- Mesurer le moment d'inertie J_{Oz}^{tot} du système en fonction de la position L du cylindre.
- En déduire le moment d'inertie J_{Cz}^{cyl} du cylindre par rapport à l'axe (Cz) par la méthode de votre choix et estimer l'incertitude associée.

La formule théorique du moment d'inertie d'un cylindre creux homogène de rayon extérieur R, de rayon intérieur r et de hauteur H vaut :

$$J_{Cz}^{cyl} = m_{cyl}\left(\frac{H^2}{12} + \frac{R^2}{4} + \frac{r^2}{4}\right)$$

- Comparer la valeur expérimentale à la valeur théorique. Conclure.

III - Non-isochronisme des oscillations

Placer le cylindre à une position fixe L de votre choix.

- Tracer la courbe $T = f(\theta_{max})$, où θ_{max} est l'angle maximal atteint par θ au cours du mouvement.
  - Vérifier que l'on retrouve bien $T = T_0$ dans l'approximation des petits angles.
  - Vérifier que, pour des angles plus grands, on peut approximer la courbe à l'aide de la **formule de Borda** :

$$T = T_0\left(1 + \frac{\theta_{max}^2}{16}\right)$$